

O. MEZA HOUTTEMAN[#]

RÉSUMÉ

Cet article a trait au problème de reconstruction de graphes. On démontre que la classe des graphes adjoints des graphes simples de degré maximum ≥ 4 est arête-reconstructible, c'est-à-dire, tout graphe dans cette classe est caractérisé par la liste de ses sous-graphes propres maximaux non-étiquetés.

ABSTRACT

This paper concern the graph reconstruction problem. We show that the Line graphs of graphs with maximum degree ≥ 4 are edge-reconstructibles, i.e., every graph in this class can be characterised by its maximal proper non-labeled sub-graphs.

[#] Licenciado en Computación (U.C.V., 1978), Doctor de tercer ciclo en Investigación de Operaciones (Universidad de Grenoble, Francia 1983). Profesor en la Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela. Área de interés: Optimización Combinatoria, Teoría de grafos, Complejidad Algorítmica.

LES GRAPHES ADJOINTS DES GRAPHES SIMPLES AVEC $\Delta(G) \geq 4$ SONT
ARÊTE-RECONSTRUCTIBLES:

Auteur: Oscar José Meza Houtteman
UNIVERSITE SIMON BOLIVAR
CARACAS. VENEZUELA.

Dans la suite tous les graphes considérés seront des graphes
simples. Nous dénotons un graphe simple par $G=(V,E)$.

Definition 1: Un sous-graphe induit de G par $U \subseteq V$, c'est un
graphe $G[U]$ dont les sommets sont ceux de U et dont les arêtes sont
les arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans U .

Definition 2: Un sous-graphe partiel ou sous-graphe de G est
un graphe (U,F) avec $U \subseteq V$, $F \subseteq E$ et $\forall e=[x_1, x_2] \in F: x_1 \in U$ et $x_2 \in U$.

Definition 3: Le graphe adjoint d'un graphe G est le graphe
 $L(G)$ dont les sommets sont les arêtes de G , deux sommets étant re-
liés dans $L(G)$ si et seulement si les arêtes correspondantes dans
 G ont une extrémité commune.

Definition 4: Soit (G_e) la liste des sous-graphes propres ma-
ximaux non-étiquetés de G . On dit qu'un graphe H est une arête-re-
construction de G si la liste des H_e est égale à celle de G . On dit
que G est arête-reconstructible si toute arête-reconstruction de G
est isomorphe à G . Une classe de graphes est arête-reconnaissable
si toute arête-reconstruction d'un graphe dans la classe appartient
à la classe. Une classe de graphes est arête-reconstructible si tout
graphe dans la classe est arête-reconstructible.

Dans (1), Harary a formulé une conjecture analogue a celle
d'Ulam: Tout graphe G avec $|E| \geq 4$ est arête-reconstructible.

Dans cet article on démontre que la classe $\mathcal{M}$ des graphes adjoints
des graphes simples de degré maximum ≥ 4 ($\Delta(G) \geq 4$) vérifient la con-
jecture d'Harary.

Pour démontrer ce résultat nous utiliserons le lemme de Kelly pour l'arête-reconstruction (Bondy (2)):

Lemme 1: Soient F et G deux graphes tels que $|E(F)| < |E(G)|$. Le nombre $n(F, G)$ de sous-graphes partiels de G isomorphes à F est arête-reconstructible. Si G ne possède pas de sommets isolés et $|V(F)| < |V(G)|$ alors le nombre $s(F, G)$ de sous-graphes induits de G isomorphes à F est arête-reconstructible.

Démonstration:

1) Chaque sous-graphe partiel F de G est compté $|E(G)| - |E(F)|$ fois dans la somme: $\sum_{e \in E(G)} n(F, G_e)$. Ainsi:

$$n(F, G) = \sum_{e \in E(G)} n(F, G_e) / (|E(G)| - |E(F)|)$$

2) Bondy a montré que si G ne possède pas de sommets isolés alors la liste des G_v (les sous-graphes induits propres maximaux non-étiquetés de G) est arête-reconstructible. Donc, étant donnée cette liste on a:

$$s(F, G) = \sum_{v \in V(G)} s(F, G_v) / (V(G) - V(F))$$

C.Q.F.D.

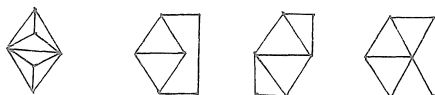
Greenwell (3) a arête-reconstruit le nombre de sommets isolés d'un graphe. Par conséquent, lorsqu'on reconstruit un graphe G' , on lui enlève tout d'abord les sommets isolés. De cette façon, toute arête-reconstruction du graphe G , obtenu à partir de G' en lui enlevant les sommets isolés, ne comportera pas de sommets isolés. En plus, si G est arête-reconstructible alors G' est arête-reconstructible. D'après cette remarque, il suffit de démontrer que les $G \setminus \{ \text{sommets isolés} \}$ sont arête-reconstructibles.

Lemme 2: (Caractérisation des graphes adjoints par des sous-graphes exclus)

G est un graphe adjoint si et seulement si aucun graphe de la liste (1) n'est un sous-graphe induit de G :



liste (1)



Soit $\mathcal{A} = \mathcal{J}' \cup \mathcal{J}$. Où:

- $\mathcal{J}'$ est la classe des graphes adjoints des graphes avec $\Delta(G) \geq 5$.
- $\mathcal{J}$ est la classe des graphes adjoints des graphes avec $\Delta(G) = 4$.

Si $G \in \mathcal{J}'$ alors G contient une 5-clique.

Lemme 3: $\mathcal{J}'$ est arête-reconnaissable.

Démonstration:

Soit $G \in \mathcal{J}'$. Il faut montrer que toute arête-reconstruction H de G est un graphe adjoint comportant une 5-clique:

1) Si G est isomorphe à K_5 alors K_5 est la seule arête-reconstruction de G car K_5 est arête-reconstructible (Harary (4)).

2) Si G n'est pas isomorphe à K_5 :

- G comporte un sous-graphe sommet propre isomorphe à K_5 . Donc, d'après le lemme 1, H contient une 5-clique.

- Pour montrer que H est un graphe adjoint, il suffit de montrer qu'il ne comporte pas de sous-graphe induit isomorphe à un des graphes de la liste (1) donnée plus haut: H ne peut pas être isomorphe à un des graphes de la liste (1) car H comporte une 5-clique; par conséquent, si H contenait un des graphes de la liste (1), alors ce graphe serait un sous-graphe propre de H . Donc, d'après le lemme 1, il serait aussi sous-graphe de G ce qui est impossible car G .

C.Q.F.D.

Proposition 1:

$\mathcal{J}'$ est arête-reconstructible.

Démonstration:

Soit $G \in \mathcal{J}'$ et $(G_e)_{e \in E(G)}$ la liste des sous-graphes propres maxi-

maux de G . Comme G comporte une 5-clique alors il existe G_{e_0} comportant un sous-graphe induit isomorphe à :

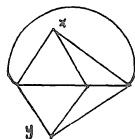


figure 1

Montrons que toute arête-reconstruction de G est isomorphe au graphe obtenu à partir de G_{e_0} en reliant les sommets x et y . En effet, s'il n'était pas ainsi, alors il existerait une arête-reconstruction de G avec un sous-graphe induit isomorphe au graphe de la figure 1 qui fait partie de la liste (1), ce qui est impossible d'après le lemme 1.

C.Q.F.D.

Si $G \in \mathcal{G}$ alors une clique d'ordre maximum de G est une 4-clique.

Lemme 4: $\mathcal{G}$ est arête-reconnaissable.

Démonstration:

Soit $G \in \mathcal{G}$ et H une arête-reconstruction de G . Il faut montrer que H est un graphe adjoint dont la clique maximum est d'ordre 4:

- 1) Si G est isomorphe à K_4 , alors K_4 est la seule reconstruction de G car K_4 est arête-reconstructible (Harary (4)).
- 2) Si G n'est pas isomorphe à K_4 :

- G comporte un sous-graphe sommet propre isomorphe à K_4 .

D'après le lemme 1, H comporte une 4-clique. Alors cette 4-clique est maximum car sinon H serait isomorphe à K_5 et donc G serait isomorphe à K_5 ce qui est impossible, ou H contiendrait proprement une 5-clique et donc G contiendrait une 5-clique d'après le lemme 1, ce qui est impossible.

- Pour montrer que H est un graphe adjoint, il suffit de montrer qu'il ne comporte pas de sous-graphe induit isomorphe à un des graphes de la liste (1): H ne peut pas être isomorphe à un élément de cette liste car les graphes de cette liste comportant une 4-clique sont tous arête-reconstructibles (Harary (4)); de plus, aucun élément de la liste (1) ne peut pas être isomorphe à un sous-graphe induit propre de H car dans ce cas G contiendrait aussi un tel sous-graphe d'après le lemme 1, ce qui est impossible. Donc, H

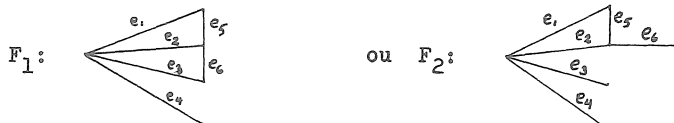
Proposition 2:

$\mathcal{G}$ est arête-reconstructible.

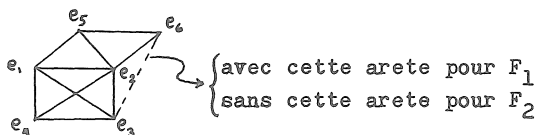
Démonstration:

Soit $G \in \mathcal{G}$ et $(G_e)_{e \in E(G)}$ la liste des sous-graphes propres maximaux de G . Soit F un graphe sans sommets isolés avec $L(F)$ isomorphe à G . On sait que $\Delta(F)=4$. Considérons un sommet de F de degré 4 :

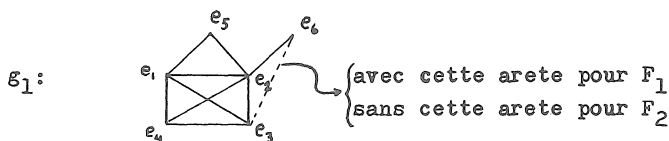
1) Supposons que F contient un sous-graphe partiel isomorphe à :



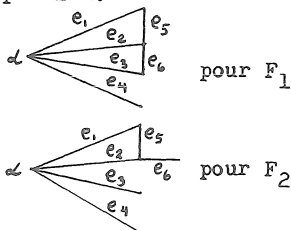
Alors, G contient le sous-graphe induit:



Donc, il existe un G_{e_0} avec un sous-graphe induit isomorphe à :



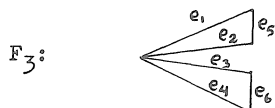
Etant donné que toute arête-reconstruction de G contient un sous-graphe partiel isomorphe à g_1 alors tout graphe g' dont le graphe adjoint est une arête-reconstruction de G , contient le sous-graphe partiel:



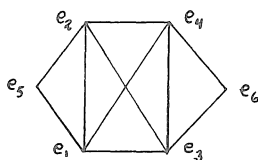
Dans g_1 , e_6 est adjacent à e_2 . Il ne peut pas être adjacent à $\mathcal{A}$ dans g' car $\Delta(g')=4$. Par conséquent, e_6 est adjacent à e_5 dans g_1 .

Ainsi, toute arête-reconstruction de G s'obtient à partir de G_{e^0} en joignant e_5 et e_6 , deux sommets bien précis de G_{e^0} .

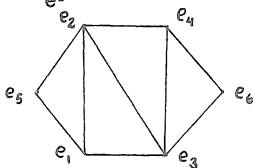
2) Supposons que F ne contient pas de sous-graphe isomorphe à F_1 ou F_2 mais il contient un sous-graphe partiel isomorphe à :



G contient alors le sous-graphe induit:



Donc, il existe G_{e^0} contenant le sous-graphe induit:



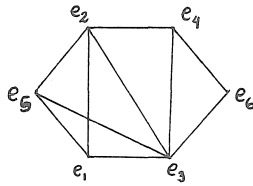
tel que e^0 appartient à une 4-clique pour toute arête-reconstruction de G . (D'après le lemme 1, le nombre de 4-cliques contenant une arête spécifique est arête-reconstructible. Donc, on choisit un G_{e^0} dont ce nombre est positif).

Toute arête-reconstruction de G est un graphe adjoint. Par conséquent, d'après le lemme 2, e^0 doit relier deux sommets du graphe précédent:

$$e^0 = [e_5, e_3], [e_5, e_4], [e_5, e_6], [e_6, e_1], [e_6, e_2] \text{ ou } [e_1, e_4].$$

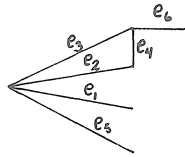
2.1.) Supposons que $e^0 = [e_5, e_3]$:

On aurait une arête-reconstruction de G comportant le sous-graphe induit:



Cette arête-reconstruction ne peut pas être isomorphe au graphe ci-dessus car ce graphe est arête-reconstructible (Harary (4)) et G serait aussi isomorphe à lui, ce qui est faux. Donc, le sous-graphe ci-dessus est un sous-graphe sommet propre de cette arête-reconstruction de G . D'après le lemme 1, toute arête-reconstruction de G contient un sous-graphe induit isomorphe au graphe ci-dessus et cela implique que tout graphe dont le graphe adjoint est une arête-reconstruction de G contient un sous-graphe isomorphe à :

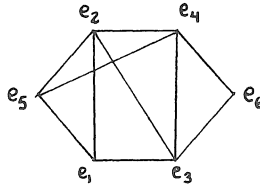
F_2 :



en particulier F , ce qui est impossible d'après les hypothèses. Donc, $e^\circ \neq [e_3, e_5]$.

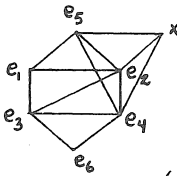
2.2.) Supposons que $e^\circ = [e_5, e_4]$:

On aurait une arête-reconstruction H de G avec le sous-graphe induit :



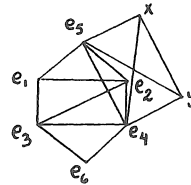
Comme on a supposé que e^o appartient à une 4-clique quelle que soit l'arête-reconstruction de G , cette 4-clique ne peut être induite que par $\{e_5, e_4, e_2, x\}$ ou $\{e_5, e_4, x, y\}$, où x, y sont deux sommets différents de $e_1, e_2, \dots, e_6$.

H doit contenir donc un des sous-graphes partiels:



(2.2.1)

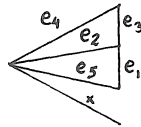
ou



(2.2.2.)

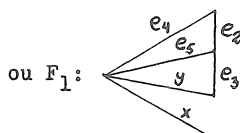
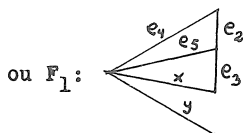
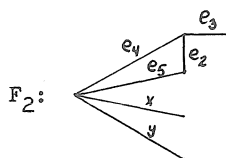
Si on a le cas (2.2.1.), ou bien H est isomorphe au graphe de la figure (2.2.1.), ou H contient un sous-graphe partiel arête propre isomorphe au graphe de la figure (2.2.1.). Dans le premier cas, G serait isomorphe à H car H est arête-reconstructible (Harary (4)). Dans le deuxième cas, d'après le lemme 1, G contiendrait un sous-graphe partiel isomorphe à celui de la figure (2.2.1.). Quoi qu'il en soit, le graphe F contiendrait un sous-graphe partiel isomorphe à:

F_1 :



ce qui est impossible d'après les hypothèses.

Si on a le cas (2.2.2.), en raisonnant pareil au cas (2.2.1.), le graphe F contiendrait un sous-graphe partiel isomorphe à:



(Si e_3 n'est adjacent ni à x ni à y)

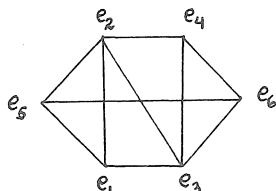
(Si x est adjacent à e_3)

(Si y est adjacent à e_3)

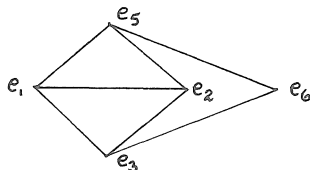
ce qui est impossible d'après les hypothèses. Donc, $e^\circ \neq [e_5, e_4]$.

2.3.) Supposons que $e^\circ = [e_5, e_6]$:

On aurait une arête-reconstruction de G contenant le sous-graphe induit:



Donc, on aurait une arête-reconstruction de G contenant le sous-graphe induit:



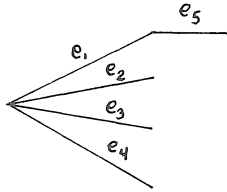
ce qui est impossible car ce graphe est dans la liste (1). Donc, $e^\circ \neq [e_5, e_6]$.

2.4.) Les cas $e^\circ = [e_6, e_2]$ et $e^\circ = [e_6, e_1]$ sont similaires aux cas (2.1) et (2.2) respectivement et on arrive à ce que $e^\circ \neq [e_6, e_2]$ et $e^\circ \neq [e_6, e_1]$.

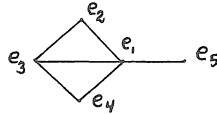
Finalement, seul le cas où $e^\circ = [e_1, e_4]$ convient. Ainsi, toute arête-reconstruction de G est isomorphe au graphe obtenu à partir de G_{e° en reliant e_1 et e_4 , deux sommets bien précis dans G_{e° .

3) Supposons que F ne contient pas de sous-graphe partiel isomorphe à F_1 , F_2 ou F_3 mais il contient un sous-graphe partiel isomorphe à:

F_4 :



Dans ce cas, il existe G_{e^0} contenant le sous-graphe induit:

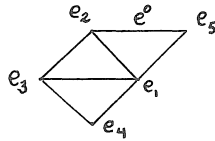


tel que e^0 appartient à une 4-clique. (D'après le lemme 1, le nombre de 4-cliques contenant une arête spécifique est arête-reconstructible. Donc, on choisit un G_{e^0} dont ce nombre est positif).

Comme les sommets e_1, e_2, e_4, e_5 induisent $K_{1,3}$, on doit avoir $e^0 = [e_2, e_5]$, $[e_4, e_5]$ ou $[e_2, e_4]$.

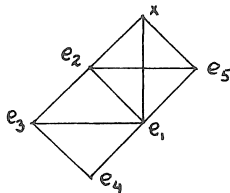
3.1) Supposons que $e^0 = [e_2, e_5]$ (le cas $e^0 = [e_4, e_5]$ est similaire)

On aurait une arête-reconstruction de G contenant le sous-graphe induit:

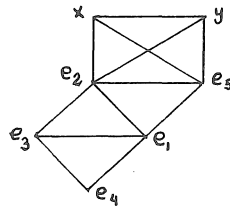


Comme e^0 appartient à une 4-clique de cette arête-reconstruction, cette 4-clique serait induite par $\{e_1, e_2, e_5, x\}$ ou $\{e_2, e_5, x, y\}$, où x, y sont deux sommets différents de $e_1, e_2, \dots, e_5$.

On a donc une arête-reconstruction H de G contenant un sous-graphe partiel isomorphe à:

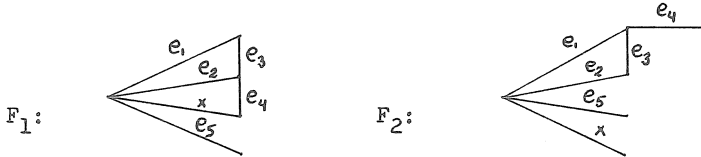


(3.1.1.)



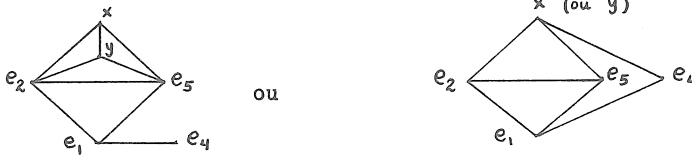
(3.1.2)

Dans le cas (3.1.1.), ou bien H est isomorphe au graphe de la figure (3.1.1.) ou H contient un sous-graphe partiel arête-propre isomorphe au graphe de la figure (3.1.1.). Dans le premier cas G serait isomorphe à H car H est arête-reconstructible (Harary (4)). Dans le deuxième cas, d'après le lemme 1, G contiendrait un sous-graphe partiel isomorphe à celui de la figure (3.1.1.). Quoiqu'il en soit, le graphe F contiendrait un sous-graphe partiel isomorphe à:



(Si e_4 est adjacent à x) (Si e_4 n'est pas adjacent à x)
ce qui est impossible d'après les hypothèses.

Dans le cas (3.1.2.), H contient un sous-graphe induit isomorphe à:



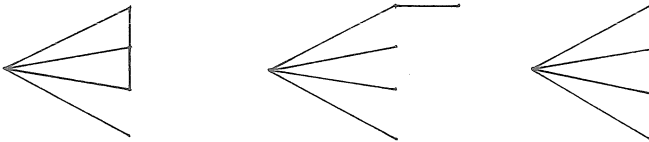
(Si e_4 n'est adjacent
ni à x ni à y)

(Si e_4 est adjacent à x
(ou y))

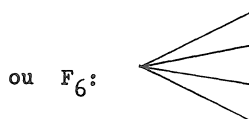
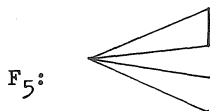
D'après le lemme 2, ceci est impossible.

Finalement on a $e^0 = [e_2, e_4]$ et toute arête-reconstruction de G est isomorphe au graphe obtenu à partir de G_{e^0} en reliant e_2 et e_4 , deux sommets bien précis de G_{e^0} .

4) Supposons que F ne tombe pas dans les cas (1), (2) ou (3).
Donc, F ne contient pas de sous-graphe aux graphes:



Pour tout sommet x de degré 4: $F \left[\{x\} \cup \bigwedge(x) \right]$ induit une composante connexe isomorphe à:



On sait que si F est non-connexe, alors G est non-connexe (car F ne possède pas de sommets isolés) et donc G est arête-reconstructible car G ne possède pas de sommets isolés. Si F est connexe, alors il est isomorphe à F_5 ou F_6 et on sait d'après Harary (4) que $L(F_5)$ et $L(F_6)$ sont arête-reconstructibles.

Finalement (1), (2), (3) et (4) impliquent que $\mathcal{G}$ est arête-reconstructible.

C.Q.F.D.

Théorème:

La classe des graphes adjoints des graphes simples de degré maximum ≥ 4 est arête-reconstructible.

BIBLIOGRAPHIE:

- (1) Harary, Frank:
"On the reconstruction of a graph from a collection of subgraphs". Theory of graphs and its applications. (Proceedings of the Symposium held in Prague, 1964) édité par M. Fiedler. Prague. pp. 47-52.
- (2) Bondy, J.A. ; Hemminger, R.L.:
"Graph Reconstruction - A Survey".
Journal of Graph Theory, vol. 1 (1977), 227-268.
- (3) Greenwell, D.L.:
"Reconstructing Graphs". Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971), 431-433.
- (4) Harary, F. ; Palmer, E.:
"A note on similar points and similar lines of a graph".
Rev. Roumaine Math. Pures et Appli. 10 (1965), 1489-1492.